

土的本构理论和实验

修学纯 黄日德

THEORY AND EXPERIMENTS OF CONSTITUTIVE RELATION FOR SOIL

Xiu Xue-chun Huang Ri-de

ABSTRACT

At first, this paper summarizes the basic contents and theoretical state of soil elastic-plastic constitutive relationship used for blast wave calculations. In particular, it has given more detailed account of the relatively comprehensive soil hardening plastic model-cap model which has been developed in the world today. Then, we present a complete preliminary procedure of how to make cap model experiments in a larger stress range by the use of our current experimental devices in our country. This is the most important content of the present paper.

一、引言

爆炸波在土体中的传播规律可用连续介质力学的方法来求解。描述连续介质运动的方程可根据三个基本力学定律导出,即根据质量守恒定律、动量守恒定律和能量守恒定律导出。推导连续介质运动方程的方法有两种:其一是欧拉法,它能给出空间某一点在任意时刻的运动参数和状态参数;另一是拉格朗日法,它能给出每一个质点的运动参数和状态参数。在上述两种方法中,分别有和空间坐标或物质坐标相对应的应力应变量度以及波阵面条件,构成各自的配套关系式。但是,不论采用什么方法,其运动参数和状态参数都多于由三个基本定律所能导出的方程式个数。因此,必须再配以土的本构关系,才能使方程组封闭求解。由此不难看出,土的本构关系是研究土中爆炸波传播理论的必不可少的重要前提。

当普通炸药爆炸时,爆心附近土中最大压力的量级可以达到几十万大气压力,然后,随着距爆心距离的增加,压力逐渐衰减到很低的数值,以至消失。由于土中压力从高压到低压的变化范围很大,因而影响本构关系的因素在不同压力量级中将有不同的反映,情况比较复杂,在目前阶段,为了能够得到应用于理论计算的本构关系,将不得不采用一定的假设。土的本构关系既不同于流体的本构关系(即一般所谓的状态方程),也不同于一般金属的本构关系,它比这二者都要复杂得多。最近几年,土的本构理论在国外有较快的发展,而在国内还刚刚开始。特别是如何根据国内试验设备和量测技术条件,通过实验得到土的本构关系是个

急需研究探讨的问题。然而,要解决这一问题,就必须首先弄清楚土的本构关系到底包括那些内容,而后才能确定最低限度的必不可少的基本实验内容,本文将对这些内容加以详细讨论。

土的本构关系到底包括那些内容,目前国内外的提法并不完全一致。依我们的看法,还是归纳为状态方程(P, V, S)关系式和弹塑性应力应变关系式为好。按理说,应变率对土的弹塑性性质也是有影响的,但是它的影响程度如何,一直是弹塑性理论中有争议的问题,迄今尚未得到解决。目前,关于土中爆炸波的理论研究多半还是建立在与应变率无关的假设上,因此,本文将不涉及应变率的问题。

二、土的去熵运动状态方程

土的状态方程与一般流体的状态方程不同,它除了加载规律以外,还有卸载规律,即加载和卸载时,应力应变关系式不同,从而表现出介质具有塑性。状态方程的形式,一般常取为 $P = P(V, S)$ 的形式,即压力是比容和熵的函数。这是一般形式的状态方程,在土中压力比较低的情况下,比如说每平方厘米几千公斤以下,土中熵的变化是比较小的,对压力的影响不大,我们可以把熵从状态方程中去掉,状态方程则变成 $P = P(V)$ 或 $P = P(\epsilon_v)$ 的简单形式,我们把它叫做土的去熵运动状态方程。在这种情况下,能量方程就失去意义了,因而描写连续介质运动的方程就只剩下质量守恒方程和动量守恒方程。

表示静水压力 P 和体积应变 ϵ_v 关系的状态方程比较简单,它没有什么理论可言,主要是通过实验得到曲线。这是一种各方向等压(即 $P = -\sigma_1 = -\sigma_2 = -\sigma_3$)的不排水压缩试验,可称做“静水压力实验”。不考虑磁滞效应的典型的 $P-\epsilon_v$ 曲线如图1所示。

$P-\epsilon_v$ 曲线有如下的特点:令加载曲线为 OA ,当压力大于 P_f 时,在 A 点以上加载和卸载沿同一条曲线进行,当卸载到 A 点时,如再继续卸载,卸载将不再沿加载线进行,而是沿 AC 线进行,而且不论压力多么大,当压力降至 A 点后,都是沿 AC 卸载。当压力小于 P_f 时,加载和卸载沿着不同的曲线进行。同时也近似地认为,卸载和重复加载的变形是可逆的。加载和卸载的体积模量都是变量,依赖于静水压力 P 。完全卸载后不能再恢复的体积变形是塑性体积应变 ϵ_v^p ,不言而喻,相应于压力 P_f 的塑性体积应变是最大的塑性体积应变,在图中为 C 点,也就是说,当压力大于 P_f 后,塑性体积应变不再增加了。而所恢复的体积应变部分是弹性体积应变。

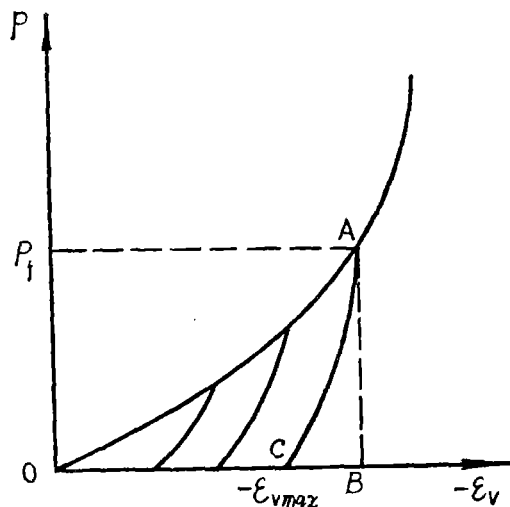


图1 土去熵运动状态方程示意图

三、土的弹塑性应力应变关系

本节所讲的弹塑性应力应变关系,不仅与体积变形有关,而且还与形状有关,为了推导

出这种关系,我们先对流动法则和屈服函数进行必要的说明。

1. 流动法则的主要结论

在弹性力学中,按应力分量对每单位体积的弹性势能 W_e 进行微分,便可得到同应力分量相对应的应变分量,即 $\varepsilon_{ij} = \frac{\partial W_e}{\partial \sigma_{ij}}$ 。在塑性力学中,也可用类似的办法,令介质在不同的应力状态中含有不同的塑性能 W_p ,如果在主应力空间中将含有同量的塑性能的点连起来,所形成的面称为塑性势面,它可用函数 $g(W_p) = 0$ 来表示,称为塑性势函数。

流动法则证明,塑性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^p$ 和塑性势函数存在着如下的关系式:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

式中 $d\lambda$ 是待求的非负因子,是确定应变大小的函数。流动法则还证明,塑性应变增量的方向总是与塑性势面正交。所以从流动法则可知,确定塑性应力应变增量关系的关键是确定塑性势函数 $g(W_p)$ 。如果塑性势函数和下面所讲的屈服函数相等,则这种情况就称为相适应流动法则;如果 $g \neq f$,则称为不相适应的流动法则。因此屈服函数 f 的具体形式就成为大家所十分关心的问题。

若 $g = f$ 时,则可能有以下几种变形情况发生:

当 $f < 0$ 时,土未进入塑性状态,而仍处于弹性阶段,所以此时不产生塑性应变,土的应力应变关系为弹性的;

当 $f = 0$ 时,表示土进入塑性状态,此状态又分为三种不同的情况:

当 $df > 0$ 时,表示加载, $d\varepsilon_{ij}^p \neq 0$;

当 $df = 0$ 时,表示中性加载, $d\varepsilon_{ij}^p = 0$, 塑性应变不变;

当 $df < 0$ 时,表示卸载, $d\varepsilon_{ij}^p = 0$, 塑性应变不变,此时,应力应变关系按弹性规律变化。

从以上的结论可以看出,只有当 $f = 0$, $df > 0$ 时,塑性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^p$ 才不为零。

2. 屈服函数关系式

土的屈服函数关系式可分为破坏包络线关系式 ($f_1 = 0$) 和加载函数关系式 ($f_2 = 0$),下面分别介绍一下它们的一般理论原则。

(1) 破坏包络线

土的破坏准则和应力张量与土的本身性质有关,一般可表示为:

$$f(\sigma_{ij}) = C$$

式中 σ_{ij} 表示应力张量, C 表示土的性质常数。如果土是均匀各向同性的,则应力张量是对称的六维张量,即只有六个独立的分量。这六个独立的应力分量和三个主应力以及主应力坐标轴的三个方位是等效的。由于在室内作三轴实验时,只能施加主应力,其方位是固定不变的,因此,土的破坏准则就完全决定于三个主应力,也可以说决定于三个主应力组成的不变量。在上述条件下,土的破坏准则可以表达为以下的形式:

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0$$

$$\text{或} \quad f(I_1, J_2, \mu_\sigma) = 0$$

上式中,

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -3P$$

是应力张量第一不变量,表示平均静水压力;

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

是应力偏量第二不变量,它表示形状变形应变能; J_3 没有确切的物理意义;而 μ_σ 是洛德应力参数,它表示应力状态点在主应力空间中的方位,换句话说,它表示在主应力空间的不同方位上,破坏准则有不同的数值。

以 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 主应力为坐标轴,可将破坏准则在这样一个主应力空间中用图来表示。在塑性理论中最广泛使用的屈服准则之一是 Mises 准则,它在主应力空间中为一圆柱面;另一是 Tresca 准则,它在主应力空间中为正六面形的棱柱面。上述的两个准则在 π 平面的投影图形,分别为圆和正六边形,这些图形都是外凸的。可以证明,前者只反映了 J_2 的作用;而后者不仅反映了 J_2 的作用,也反映了 J_3 (或 μ_σ)的作用,它表明屈服条件在不同的方位上其数值是不相同的。前者为一圆,每一点都有一确定的法线;而后者为正六边形,其角点的法线是不确定的。这两种准则都是与静水压力无关的破坏准则。

但对土来说,其破坏准则与平均静水压力有密切的关系,土的破坏条件一般常用 Coulomb (1773年) 条件表示,即

$$|\tau| = -\sigma_n \tan \varphi + C$$

式中 τ —法向为 n 的平面内的极限剪应力;

σ_n —法向为 n 的平面上的法向拉应力;

C —粘聚力;

φ —内摩擦角。

但是在计算中直接引用上式是麻烦的,因为 n 是任意的。若利用平面极限莫尔圆把它表示成该点的主应力关系式,使用起来就方便多了。这种关系称为 Mohr—Coulomb 破坏准则。在主应力空间中,它是一个以 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = C \cot \varphi$ 为顶点的六棱锥面,它在 π 平面上的投影为一不等角而等边的六边形,它反映了三个不变量(I_1 , J_2 , J)的关系式。上述三个准则的彼此关系如图 2 所示。

为了使用方便, Mohr—Coulomb 破坏准则还可更进一步用圆锥来代替。但实验又表明,以 $\sqrt{J_2}$ 和 $-I_1$ 为坐标画出来的曲线(又称破坏包络线)在压力较高时不是一条直线,而是一条曲线¹,如图 3 所示。此曲线绕 I_1 轴旋转一周在主应力空间中所成的是一钟形破坏面。这种曲线可用不同的函数形式来逼近,但较好的函数形式是 Dimaggio 和 Sandler (1971年) 提出的指数形式:

$$f_1 = \sqrt{J_2} - [A - Ce^{-\mu I_1}] = 0$$

(2) 加载函数—“帽子”模型

上的破坏包络线只反映了土的破坏与平均静水

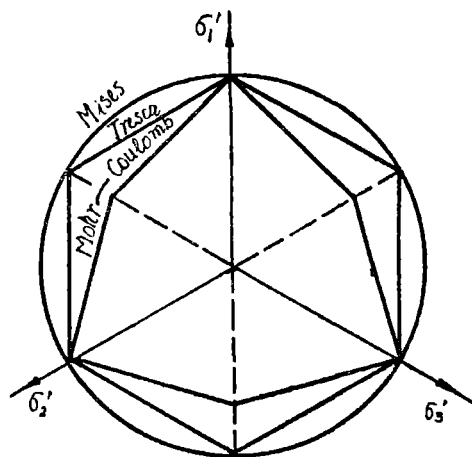


图2 三种不同的屈服面

压有关的性质。可是土又是一种应变硬化（或软化）效应比较强烈的材料。为了反映这种特性，近年来，曾提出过各种不同的模型。其中较具有代表性的可推“帽子”模型。帽子模型的基本优点就是它能反映土在静水压力下能产生塑性体积应变这一事实。为了把土应变硬化的屈服准则（ $f_2 = 0$ ）和上述的破坏准则（ $f_1 = 0$ ）相区别，一般称 f_2 为“加载函数”。加载函数的形式也是多种多样的。一般来说，采用下面的表达式较为便于得出具体结果：

$$f_2(I_1, \sqrt{J_2}, \epsilon_v^p, K_1, K_2, \dots) = 0$$

式中 ϵ_v^p 表示塑性体积应变； K_1, K_2 表示物理常数。

代表土的帽子模型的加载函数 f_2 必须具备以下的特点（见图3）^{2 3 4}。它与 I_1 轴应垂直相交，表示此时只有塑性体积应变；它与 $f_1 = 0$ 交点的切线必须垂直于 $\sqrt{J_2}$ 轴，表示此时只有塑性形状应变，即塑性剪应变。这两个特点不仅与物理事实相一致，而又符合流动法则。在上述两点之间的曲线应是光滑过渡的，能代表这种特点的曲线只有圆和椭圆。实验表明，椭圆与实验数据拟合较好。所以一般用椭圆表示加载函数 f_2 。此半椭圆绕 I_1 轴旋转所形成的半椭球面像一顶帽子，故名“帽子”模型。椭圆的长轴在 I_1 轴上，短轴与 $\sqrt{J_2}$ 轴平行。此椭圆依赖于塑性体应变 ϵ_v^p ，不同的 ϵ_v^p 值对应不同的椭圆，当 $|\epsilon_v^p|$ 增加时，椭圆向右移动， $|\epsilon_v^p|$ 达到最大值时，帽子就不再向右移动了；反之向左移动。

由于要求曲线 $f_2 = 0$ 在和曲线 $f_1 = 0$ 相交时， f_2 具有和 $\sqrt{J_2}$ 相垂直的切线，所以此交点便是椭圆的上顶点，对应的 $\sqrt{J_2}$ 值实际上就是椭圆的短轴，而相应的 I_1 值也就是椭圆圆心的横坐标。如 f_1 的形式为：

$$f_1 = \sqrt{J_2} - [A - Ce^{-B I_1}] = 0$$

则相应的 f_2 的形式就如下所示：

$$f_2 = \left(\frac{I_1 - L}{L_K - L} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{J_2}}{A - Ce^{-BL}} \right)^2 - 1 = 0$$

式中 A 是破坏包络线的渐近线与 $\sqrt{J_2}$ 轴的交点；

$A - C$ 是破坏包络线与 $\sqrt{J_2}$ 的交点；

$L_K - L$ 是椭圆的长轴；

$A - Ce^{-BL}$ 是椭圆的短轴。

若取

$$R = \frac{L_K - L}{A - Ce^{-BL}}$$

为椭圆的长短轴之比，则

$$L_K = L - R[A - Ce^{-BL}]$$

在上式中 L 和 L_K 是椭圆中心和右端的 I_1 值，它们都是 ϵ_v^p 的函数，必须由实验求得。 L 代

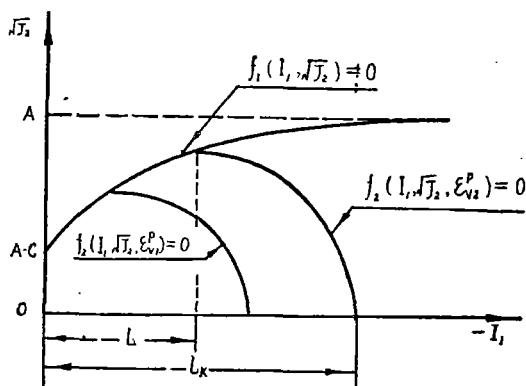


图3 破坏包络线 $f_1 = 0$

表的是三轴破坏实验时的主应力和 ($L = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$)。 L_K 代表的是静水压力实验时的三倍静水压力 ($L_K = 3\sigma$)。只要 L 和 L_K 与 ε_v^p 的函数关系确定之后, 椭圆帽子也就跟着确定了。

因而确定加载函数 f_2 的关键问题, 是通过实验求出 $L(\varepsilon_v^p)$ 和 $L_K(\varepsilon_v^p)$ 。

(3) 弹塑性应力应变关系式的推导

当 $f_1 = 0$ 和 $f_2 = 0$ 的关系式确定之后, 根据流动法则推导出塑性应力应变关系式, 这在原则上是没有问题的。但在三维的普遍情况下, 真应变的表达式是相当复杂的, 还可能产生变形主轴的旋转情况, 到目前为止, 尚极少见到有关这方面的研究。而在一维情况下, 应力波在传播过程中, 其变形主轴在空间中的方位是固定的, 每个主轴方向的应变就像杆件一样被压缩。在这种情况下, 材料的总应变增量可表达为弹性应变和塑性应变增量之和:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$$

由上式, 以及 $f_1 = 0$ 和 $f_2 = 0$, 根据流动法则可很容易地推导出增量弹塑性应力应变关系式。例如轴对称一维情况下, 其关系式可表达如下:

$$d\sigma_r = C_{11}d\varepsilon_r + C_{12}d\varepsilon_\theta$$

$$d\sigma_\theta = C_{21}d\varepsilon_r + C_{22}d\varepsilon_\theta$$

$$d\sigma_z = C_{31}d\varepsilon_r + C_{32}d\varepsilon_\theta$$

由于这种推导只是数学上的演算, 不再详细介绍了。

四、土的本构关系的基本实验

前面我们简略地介绍了土本构关系的基本理论和模型, 关键的问题是如何通过实验把本构关系的具体形式建立起来。

从前面的分析, 我们可以看出, 土的本构关系包括以下四个关系式:

- 1) $P-\varepsilon_v(\varepsilon_v^p)$ 关系式, 即状态方程;
- 2) $\sqrt{J_2}-I_1$ 关系式, 即破坏包络线;
- 3) $L_K-\varepsilon_v^p$ 关系式, 即椭圆右端与 I_1 轴的交点;
- 4) $L-\varepsilon_v^p$ 关系式, 即椭圆中心的位置。

上面四个关系式, 如能从实验得到, 土的本构关系的具体形式就建立起来了。确定上述四个关系式到底要作些什么实验? 经反复研究, 认为只要作两组基本实验就可以了。也就是说 1) 和 3) 两个关系式作一组实验, 叫做静水压力实验; 2) 和 4) 两个关系式作一组实验, 叫做土的常规三轴破坏实验。

1 静水压力实验

在作实验时, 记录瞬时压力 P 及与其相对应的瞬时总体积应变 ε_v , 即可得到 $P-\varepsilon_v$ 加载实验曲线。其中总体积真应变的表达式为:

$$\varepsilon_v = \ln \frac{V}{V_0}$$

快速完全卸载后与 P 相对应的塑性体积真应变为：

$$\varepsilon_v^p = \ln \frac{V^p}{V_0}$$

从而得到 L_k (即 $3p$) — ε_v^p 关系曲线。所以实验时, 只要记录初始体积 V_0 , 瞬时压力 p , 及与其相对应的体积 V 和完全卸载时的体积 V^p 就可以了。测量 V_0 、 P 和 V^p 相对来说是不难的, 但在不排水条件下测量 V 则比较难的多。

2. 土常规三轴破坏实验

这种实验通常是这样作的, 首先施加静水压力到一定的数值, 然后保持围压不变, 增加轴压直至土样破坏。记录破坏时的轴压 σ_z 和围压 σ_r , 便可得到:

$$\sqrt{J_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_z - \sigma_r)$$

和 $I_1 = \sigma_z + 2\sigma_r$

这样, 每一个土样作一次实验, 便在 $\sqrt{J_2} - I_1$ 坐标中得到一个破坏点。另取一土样, 采用一个新的 σ_r 值, 再作同样的实验, 又得到一个破坏点。通过一、二十个土样实验, 便可得到一条 $\sqrt{J_2} - I_1$ 破坏包络线。

当每个土样破坏后, 再进行卸载, 快速完全卸载后测量土样的体积, 便可得到塑性体积应变 ε_v 。由此可得到 $L (L = \sigma_z + 2\sigma_r) - \varepsilon_v^p$ 关系。

在作第二组实验时, “直至破坏”的标志可按下述方法确定。在作实验时, 同时记录轴向应变 ε_z , 这样便可得到 $\sigma_z - \varepsilon_z$ 应力应变曲线。

对硬土来说, 当在 $\sigma_z - \varepsilon_z$ 曲线中, σ_z 急剧下降时, 便标志土样的破坏, 其关系如图 4 所示。

对软土来说, 一般不会出现 σ_z 急剧下降的现象, 在 $\sigma_z - \varepsilon_z$ 的曲线中, 当 ε_z 达到 15~25% 时, 便可认为土样破坏了, 其关系如图 5 所示。

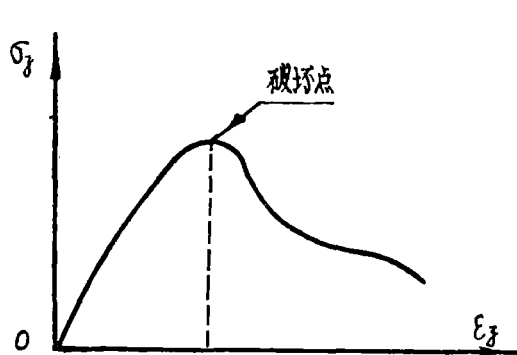


图4 硬土的 $\sigma_z - \varepsilon_z$ 曲线

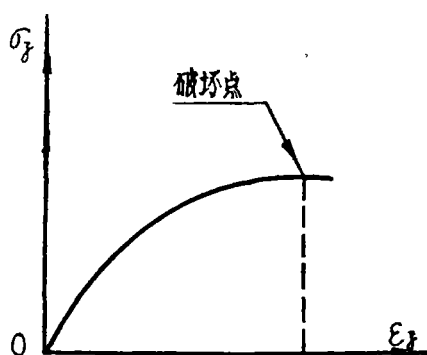


图5 软土的 $\sigma_z - \varepsilon_z$ 曲线

3. $f_2 = 0$ 的确定

利用上面的两组实验结果, 便可得到 $L_k - \varepsilon_v^p$ 和 $L - \varepsilon_v^p$ 关系曲线, 如图 6 所示。

从图上可以看出,某一个 ϵ_v^p 值便对应一组 L_k 和 L 值,它们分别表示椭圆右端与 I_1 轴交点的坐标和椭圆中心的坐标。不同的 ϵ_v^p 对应不同的椭圆。

由静水压实验可以得到整个 $L_k-\epsilon_v^p$ 曲线。但是用常规土三轴仪却不能把 $L-\epsilon_v^p$ 全部曲线做出来,因为围压 σ_1 最大每平方厘米只有几十公斤,而只能得到低压段的实验点。国内现有实验设备只能作这样的实验,因此欲求得高压段的 $L-\epsilon_v^p$ 关系,目前只有利用椭圆长短轴之比 R 不变的假设而加以推广。

如上所述,只要通过两组基本实验。我们就可以获得从每平方厘米几公斤到几千公斤的用于爆炸波传播理论的完整帽子模型了。它的示意形式如图7所示。

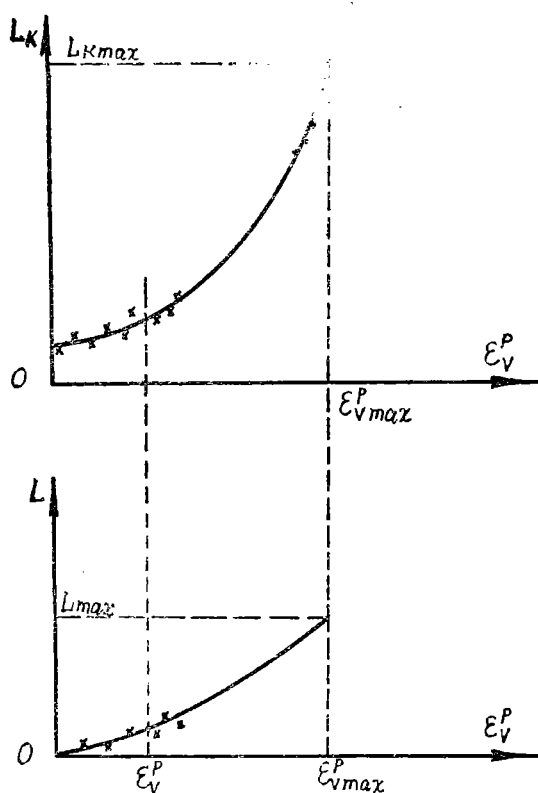


图6 $L, L_k-\epsilon_v^p$ 曲线

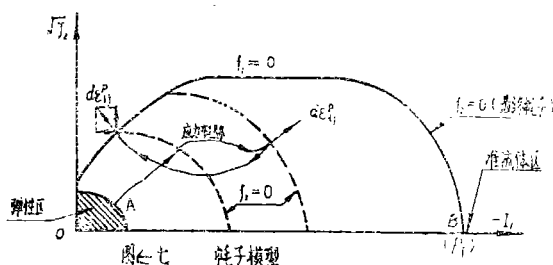


图7 帽子模型

参 考 文 献

- [1] I. Nelson, M.L. Baro and I. S. Sandler "Mathematical Models for Geological Materials for Wave Propagation Studies", DASA 2672, AD 729703, March, 1971.
- [2] Weidlinger Associates "A Generalized Cap Model for Geological Materials" AD A 006429, November, 1974.
- [3] F.L. Dimaggio and I.S. Sandler "Material Modle for Granuler Soils" J. Eng. Mech. Div, ASCE, Vol. 97, No. EM3, pp. 935-950, 1971.
- [4] I.S. Sandler "The Cap Model for Static and Dynamic problems" 17th U.S. Symposium on Rock Mechanics, LA 2-1—LA 2-11.